



UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des sciences et génie
Département de mathématiques et statistique

Prénom et nom en lettres moulées

Examen 2

Probabilités (STT-1500)
20 mars 2024 (8 h 30 à 10 h 20)
Enseignant : Jérôme Soucy

Directives de l'évaluation

1. Vérifiez que votre questionnaire comporte 4 questions réparties sur 7 pages, incluant la page couverture. Cette évaluation sera notée sur 75 points et vaut pour 30 % de votre note de session.
2. Inscrivez votre prénom suivi de votre nom, dans l'encadré prévu à cet effet. Inscrivez aussi vos initiales au bas de chacune des pages 2 à 7.
3. Déposez une carte d'identité avec photo sur le coin du bureau où vous rédigez l'examen.
4. Ne surlignez pas vos réponses ou d'autres éléments pertinents de votre démarche.
5. **Si vous manquez d'espace pour rédiger la réponse d'une question, vous devez utiliser le verso de la feuille où se trouve la question concernée. Le cas échéant, assurez-vous d'indiquer au recto que la suite de la réponse se trouve au verso. Dans le cas contraire, nous ne corrigerons pas le verso.**
6. Aucune page de cet examen ne doit être dégrafée. **N'insérez aucune feuille dans l'examen.**
7. **Sauf indication contraire, vous devez justifier chacune des étapes du raisonnement qui mène à la réponse que vous avez obtenue.**
8. Un aide-mémoire vous sera distribué avec l'examen.
9. Une calculatrice autorisée par la Faculté des sciences et génie est permise. Elle doit figurer parmi les modèles suivants : HP 20S, HP 30S, HP 32S2, HP 33S, HP 35S, TI-30Xa, TI-30XIIB, TI-30XIIS, TI-36X*, TI-30X MultiView (XS ou XB), BA35, EL-531*, EL-535, W535, EL-W535*, EL-546**, EL-510*, EL-520*, FX-260, FX-300 ES Plus, FX-300 MS, FX-300 W Plus, FX-350 MS, FX-991 MS, FX-991ES et FX-991ES PLUS, FX-991ES PLUS C, FX-991ES PLUS 2. N'importe quelles lettres peut remplacer l'astérisque.

Question 1 (18 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f(x)$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 + 4x + 4) & \text{si } -2 \leq x \leq 0; \\ a(x^2 - 4x + 4) & \text{si } 0 < x \leq 2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (10) (a) Montrez qu'un choix approprié de a fait de f une fonction de densité de probabilité. Rappelez au passage les éléments qui caractérisent une fonction de densité de probabilité. Écrivez la valeur de a dans l'encadré au bas de cette page.

$a =$

Vos initiales :

(3) (b) Montrez que la fonction f vérifie $f(x) = f(-x)$ pour tout $a, x \in \mathbb{R}$.

(5) (c) Soit X une v.a. dont la fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} a(x^2 + 4x + 4) & \text{si } -2 \leq x \leq 0; \\ a(x^2 - 4x + 4) & \text{si } 0 < x \leq 2; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où a est la valeur obtenue à la sous-question (a). Calculez $\mathbb{E}(X)$. Écrivez votre réponse dans l'encadré au bas de cette page après l'avoir justifiée.

$\mathbb{E}(X) =$

Vos initiales :

Question 2 (30 points)

Pour toutes les sous-questions, écrivez uniquement la réponse dans l'encadré qui suit la sous-question. Lorsqu'on demande une probabilité, écrivez une fraction irréductible ou une réponse arrondie à 3 chiffres après le séparateur décimal. **Aucune justification n'est demandée pour toutes les sous-questions.** Veuillez noter que chaque bonne réponse donne 5 points.

- (a) On lance un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On définit la v.a. X comme étant le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'obtention d'un cinq ou d'un six. Calculez $\mathbb{P}(X = 2)$.

- (b) On lance un dé régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On définit la v.a. X comme étant le nombre de lancers nécessaires jusqu'à l'obtention d'un cinq ou d'un six. Calculez l'espérance de X .

- (c) Une v.a. Y est telle que $Y = \text{exponentielle}(3)$. Calculez $\mathbb{P}(X > 1)$.

- (d) Vous choisissez un point uniformément dans un carré dont les côtés mesurent 2 cm. Quelle est la probabilité que le point choisi se trouve à une distance d'au moins 1 cm de tous les sommets du carré?

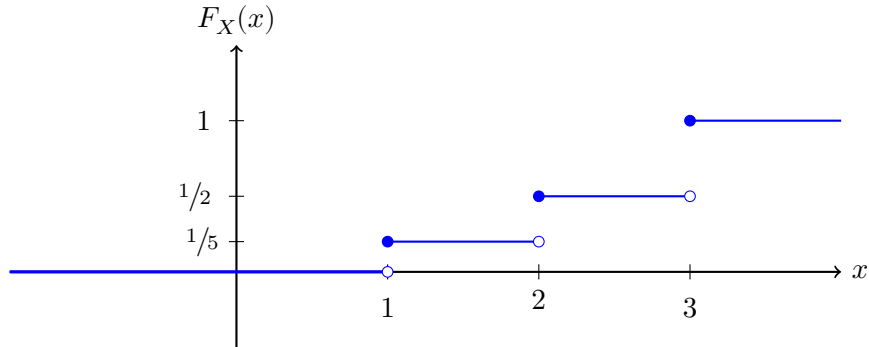
- (e) Quelle est la probabilité qu'une série 4 de 7 se termine en exactement 5 parties si les deux équipes qui s'affrontent ont la même probabilité de gagner un match? Rappelons qu'une série 4 de 7 se termine dès qu'une équipe obtient une quatrième victoire.

- (f) La probabilité que le cours de l'action d'une entreprise termine la journée en hausse est de 0,52. Quelle est la probabilité qu'au cours d'une semaine de cinq jours l'action de l'entreprise termine en hausse exactement trois fois?

Vos initiales :

Question 3 (12 points)

Pour toutes les sous-questions, on supposera que X est une v.a. dont la fonction de répartition est représentée ci-dessous. Pour toutes les sous-questions, excepté la sous-question (e), aucune justification n'est requise. Si vous croyez qu'on ne dispose pas de l'information nécessaire pour répondre à une sous-question, écrivez le mot IMPOSSIBLE dans l'encadré.



- (2) (a) Que vaut $\mathbb{P}(X \leq 3/2)$? Réponse :
- (2) (b) Que vaut $\mathbb{P}(X = 2)$? Réponse :
- (2) (c) Que vaut $\mathbb{P}(1 < X < 2)$? Réponse :
- (2) (d) Si $p_X(x)$ désigne la fonction de masse de X , pour quelle(s) valeur(s) de $x \in \mathbb{R}$ la fonction $p_X(x)$ atteint-elle un maximum? $x =$
- (4) (e) Calculez $\mathbb{E}(X)$ et écrivez votre réponse finale dans l'encadré au bas de cette page.

$$\mathbb{E}(X) = \text{$$

Vos initiales :

Question 4 (15 points)

Soit X une v.a. telle que $X \sim$ exponentielle (λ).

- (3) (a) Calculez $\mathbb{P}(\{X = 2\} \cup \{X = 2024\})$. Écrivez votre réponse dans l'encadré. Justifiez brièvement votre réponse.

$$\mathbb{P}(\{X = 2\} \cup \{X = 2024\}) =$$

- (6) (b) Exprimez $\mathbb{P}(1 < X \leq 2)$ en fonction de λ . Écrivez votre réponse finale dans l'encadré au bas de cette page.

Réponse :

Vos initiales :

- (6) (c) Une variable aléatoire continue Y est telle que $\mathbb{P}(1 < Y \leq 2) = \frac{1}{4}$. Est-il possible que

$$Y \sim \text{exponentielle}(\lambda)$$

pour un certain $\lambda > 0$? Si oui, trouvez une telle valeur de λ et écrivez-la dans l'encadré au bas de la page. Dans le cas contraire, justifiez pourquoi il n'existe aucune valeur de $\lambda > 0$ tel que $Y \sim \text{exponentielle}(\lambda)$ et écrivez le mot *AUCUNE* dans l'encadré au bas de cette page.

Réponse :

Vos initiales :